周期为 $N \equiv 1(\mathrm{mod}4)$ 的平衡最优几乎二元序列对

彭秀平[1,2]，李红晓[1,2]，王仕德[1,2]，林洪彬[3]
（1.燕山大学信息科学与工程学院，河北 秦皇岛 066004；2.河北省信息传输与信号处理重点实验室，河北 秦皇岛 066004；
3. 燕山大学电气工程学院，河北 秦皇岛 066004)

摘 要: 基于组合设计理论，对周期为 $N \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ 的平衡最优几乎二元序列对的构造方法进行了研究。根据（几乎）二元序列对的不同组合，得出了最大互相关值分别为 $\theta_c = 1,2,3$，以此 θ_c 值为前提，推导得出 3 种情况的自相关理论界，并生成了 4 类满足互相关值和自相关理论界下界值的平衡（几乎）最优几乎二元序列对。所提构造方法扩展了互相关值的取值范围并进一步降低了最优二元序列对的互相关值，且序列长度参数 f 可选择任意整数，丰富了最优二元序列对的存在空间。

关键词：几乎二元序列；平衡性；自相关性；互相关性
中图分类号：TN911.2
文献标识码：A
DOI: 10.11959/j.issn.1000−436x.2021078

Balanced optimal almost binary sequence pairs of period $N \equiv 1(\mathrm{mod}4)$

PENG Xiuping[1,2], LI Hongxiao[1,2], WANG Shide[1,2], LIN Hongbin[3]
1.School of Information Science & Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China
2. Hebei Province Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao 066004, China
3. School of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China

Abstract: Based on the combinatorial design theory, the constructions of balanced optimal almost binary sequence pairs of period $N \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ were researched. The maximal cross-correlation values θ_c were obtained by different combinations of (almost) binary sequence pairs. Furthermore, three new bounds on the autocorrelation values under the precondition of the value of θ_c=1,2,3 were presented individually. Meanwhile, four types of balanced (almost) optimal almost binary sequence pairs were generated, which satisfied the cross-correlation values and autocorrelation theory bounds. Through the constructions, the range of the cross-correlation values is expanded and the cross-correlation value of the optimal binary sequence pairs is further reduced. More than odd, the value of sequence length parameter f can be any integer, which enriches the existence space of the optimal binary sequence pair.

Keywords: almost binary sequence, balanced, autocorrelation, cross-correlation

1 引言

具有优良自相关特性的序列在线性系统参数识别、实时信道估计、均衡和同步等领域都有广泛应用[1]，另外一些应用领域如对抗多径干扰[2]、多载波码分多址（CDMA, code-division multiple access）、正交频分复用多址（OFDMA, orthogonal

收稿日期：2021−07−08；**修回日期**：2021−10−04
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No.61601401）；河北省自然科学基金资助项目（No.F2021203040）；河北省高等学校科学技术研究基金资助项目（No.BJ2018018, No.ZD2019039, No.QN2021144）
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61601401), The Natural Foundation of Hebei Province (No.F2021203040), Young Talent Program of Colleges in Hebei Province under Grant (No.BJ2018018, No.ZD2019039, No.QN2021144)

frequency division multiple access）、雷达和测距系统等不仅要求序列具备优良的自相关特性，也需具备优良的互相关特性[3]。为了给序列设计提供一个理论评判标准，国内外学者对序列设计相关性的理论界限进行了研究[4-6]，其中，Shedd 等[6]推导了周期自相关和互相关的理论界，并在周期自相关值和互相关值之间进行了折中。Sarwate 界表明，不存在一组序列同时具有优良自相关性和优良互相关性以满足不同的应用需求。为此，国内外学者主要致力于先设计自相关旁瓣值尽可能小的各类序列，再研究它们的互相关性。当序列的自相关函数旁瓣值全为 0 时，称这样的序列为最佳序列，然而现有的最佳二元序列仅存在长度为 4 的情况，最佳四元序列仅存在长度为 2、4、8 和 16 的情况[7]。基于此，备受关注的是具有理想或优良自相关特性的（几乎）二元[8-9]和（几乎）四元序列[10-11]及最佳多相序列[12-14]的构造方法研究。由于最佳多相序列大量存在，目前研究得到了一些满足 Sarwate 界最优的最佳多相序列集[13]。同时，由于二元和四元序列在实际应用中实现简单，学者们对这些具有优良自相关特性的二元[15-16]和四元序列[17]的互相关特性也进行了大量研究，然而这些序列的互相关值并不能达到 Sarwate 界的下界值。

为解决上述问题，文献[18]对平衡二元序列对的互相关值的理论界做了进一步研究，以序列自相关值最优为前提研究序列对互相关值的理论界，与 Sarwate 界相比，提高了互相关理论下界值，并提出了周期为 $N\equiv 1(\bmod 4)$ 的自相关值为 $\{1,-3\}$ 且满足理论界的下界值为 $\lceil\sqrt{N}\rceil$ 的平衡最优二元序列对的构造方法。在此思想的启发下，文献[19]对自相关模值为 $\sqrt{5}$ 且周期为 $N\equiv 1(\bmod 4)$ 的平衡四元序列对的互相关理论界进行了研究，并得到了满足理论界要求的理想四元序列对；文献[20]从另一角度进行了研究，当二元序列对的互相关值满足最优值情况时，对周期为 $N\equiv 1(\bmod 4)$ 且以互相关值 $\{1,-3\}$ 为前提，对这类序列对的自相关理论界进行了研究，并得到了满足自相关理论下界值的最优二元序列对的构造方法，但是得到的最优二元序列对相当有限，在周期 $N\leqslant 300$ 内，仅存在 $N=5,37,101,197$ 这 4 种情况。

为了获得更多的最优二元序列对，本文在文献[20]的基础上，通过在二元序列中引入一个 0 元素，首先对（几乎）二元序列对的互相关值和自相关值的取值情况进行了讨论，得出最大互相关值 θ_c 分别为 1、2、3 这 3 种情况；其次以互相关值最优（即 $\theta_c=1,2$）或几乎最优（即 $\theta_c=3$）的分布值情况为前提，推导出周期为 $N\equiv 1(\bmod 4)$ 的平衡几乎二元序列对的自相关函数值所满足的理论界；最后基于四阶分圆类的方法，提出了满足（几乎）最优互相关值和自相关理论界下界值的平衡（几乎）最优几乎二元序列对的构造方法。

2　基本概念及引理

定义 1　若周期为 N 的序列 $u=\{u(t)\}_{t=0}^{N-1}$ 满足式(1)。

$$u(t)=\begin{cases}u(0), & t=0\\ 1, & t\in U\\ -1, & t\in Z_N^*\setminus U\end{cases}\tag{1}$$

其中，$Z_N^*=Z_N\setminus\{0\}$。当 $u(0)\in\{\pm1\}$ 时，称序列 u 为二元序列；当 $u(0)=0$ 时，称序列 u 为几乎二元序列，本文用 u' 来表示。

为了便于描述，本文约定只考虑 $u(0)=-1$ 的情况，那么集合 $U=\{0<t\leqslant N-1:u(t)=1\}$ 称为二元序列 u 的特征集，集合 $U'=\{0<t\leqslant N-1:u'(t)=1\}$ 称为几乎二元序列 u' 的特征集。序列 u 和 u' 分别称为集合 U 和 U' 的特征序列。

对于二元序列，如果 N 是奇数，$|U|=(N-1)/2$，则 u 是平衡的；对于几乎二元序列，如果 N 是奇数，$|U|=(N-1)/2$，则 u' 是平衡的。

定义 2　令 u' 和 v' 是 2 个周期为 N 的几乎二元序列，则序列对 u' 和 v' 的周期互相关函数定义为

$$R_{u',v'}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}u'(t)v'(t+\tau)\tag{2}$$

其中，$0\leqslant\tau<N$，$t+\tau=t+\tau(\bmod N)$。若 $u'=v'$，则 $R_{u',u'}(\tau)$ 称为序列的周期自相关函数，简称为 $R_{u'}(\tau)$。

定义 3　令 θ_c 为序列 u' 和 v' 的最大互相关幅度值，θ_a 为序列 u' 和 v' 的最大异相自相关幅度值，分别定义为

$$\theta_c=\max\{|R_{u',v'}(\tau)|:0\leqslant\tau<N\}\tag{3}$$

$$\theta_a=\max\{|R_{u'}(\tau)|,|R_{v'}(\tau)|:0<\tau<N\}\tag{4}$$

定义 4　令 N_i 表示序列 u' 和 v' 互相关取值为

i 时的数量，定义为 $N_i = |0 \leqslant \tau \leqslant N : R_{u',v'}(\tau) = i|$。

定义 5　设 $N = 4f + 1$ 为奇素数，α 是有限域 GF(N) 上的本原元，令

$$D_i = \left\{\alpha^{i+4t}, t = 0,1,\cdots, f-1\right\}, i = 0,1,2,3 \tag{5}$$

则称 D_i 为 GF(N) 上的四阶分圆类。令

$$(i,j) = \left|(D_i + 1)\cap D_j\right|, i,j = 0,1,2,3 \tag{6}$$

其中，$D_i + 1$ 代表集合 $\left\{d_i + 1, d_i \in D_i\right\}$，“+”代表和模 N，则称 (i,j) 为基于 GF(N) 的四阶分圆数。

引理 1[21]　设 $N = 4f + 1$ 为奇素数，其中 f 为正整数。N 又可表示为 $N = 4y^2 + x^2$，根据 f 的奇偶性和 $x \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ 或 $x \equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ 的不同取值将四阶分圆数进行如下分类。

当 f 为奇数时，Z_N 上的四阶分圆数的关系如式(7)所示，Z_N 四阶分圆类的 5 个基本分圆数如表 1 所示。

$$\begin{aligned}
&(0,0) = (2,0) = (2,2)\\
&(0,1) = (1,3) = (3,2)\\
&(0,2)\\
&(0,3) = (1,2) = (3,1)\\
&(1,0) = (1,1) = (2,1) = (2,3) = (3,0) = (3,3)
\end{aligned} \tag{7}$$

表 1　f 为奇数时，Z_N 四阶分圆类的 5 个基本分圆数

(i,j)	Z_N　$x\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$	$x\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$
$16(0,0)$	$N-7+2x$	$N-7-2x$
$16(0,1)$	$N+1+2x-8y$	$N+1-2x-8y$
$16(0,2)$	$N+1-6x$	$N+1+6x$
$16(0,3)$	$N+1+2x+8y$	$N+1-2x+8y$
$16(1,0)$	$N-3-2x$	$N-3+2x$

当 f 为偶数时，Z_N 上的四阶分圆数的关系如式(8)所示，四阶分圆类的 5 个基本分圆数如表 2 所示。

$$\begin{aligned}
&(0,0)\\
&(0,1) = (1,0) = (3,3)\\
&(0,2) = (2,0) = (2,2)\\
&(0,3) = (1,1) = (3,0)\\
&(1,2) = (1,3) = (2,1) = (2,3) = (3,1) = (3,2)
\end{aligned} \tag{8}$$

引理 2[22]　对于素数 $N = 4f + 1$，则分圆数和式满足

$$\sum_{m=0}^{3}(m, m+n) = \begin{cases} f-1, n=0 \\ f, \quad n = 1,2,3 \end{cases} \tag{9}$$

表 2　f 为偶数时，Z_N 四阶分圆类的 5 个基本分圆数

(i,j)	$x\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$	$x\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$
$16(0,0)$	$N-11-6x$	$N-11+6x$
$16(0,1)$	$N-3+2x+8y$	$N-3-2x+8y$
$16(0,2)$	$N-3+2x$	$N-3-2x$
$16(0,3)$	$N-3+2x-8y$	$N-3-2x-8y$
$16(1,0)$	$N+1-2x$	$N+1+2x$

3　平衡（几乎）二元序列的相关界限

引入一个 0 元素后，新生成的几乎二元序列对的相关值会发生变化，所以本节首先对（几乎）二元序列对的互相关值和几乎二元序列的自相关值进行证明。

引理 3　令 $N \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$，当 u' 和 v' 为周期为 N 的平衡几乎二元序列时，互相关值有以下 3 种情况：$R_{u',v'}(0) \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$，$R_{u',v'}(\tau) \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$，$R_{u',v'}(\tau) \equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$。

证明　令 $\overline{U}=Z_N^* \setminus U$，$\overline{V}=Z_N^* \setminus V$，$u'$ 和 v' 的互相关函数值可以计算为

$$\begin{aligned}
R_{u',v'}(\tau) =& |\{t：t \in U, t+\tau \in V\}| + \\
& |\{t \in Z_N：t \in Z_N^* \setminus U, t+\tau \in Z_N^* \setminus V\}| - \\
& |\{t \in Z_N：t \in U, t+\tau \in Z_N^* \setminus V\}| - \\
& |\{t \in Z_N：t \in Z_N^* \setminus U, t+\tau \in V\}| = \\
& 4|(U+\tau)\cap V| + |(Z_N^* + \tau)\cap Z_N^*| - \\
& 2|(Z_N^* + \tau)\cap V| - 2|(U+\tau)\cap Z_N^*|
\end{aligned}$$

由于 u' 和 v' 是平衡几乎二元序列，因此 $|U| = |V| = \dfrac{N-1}{2}$。

当 $\tau=0$ 时，可以得到

$$\begin{aligned}
R_{u',v'}(0) =& 4|(U+\tau)\cap V| + N - 1 - 2|U| - 2|V| = \\
& 4|(U+\tau)\cap V| + N - 1 - 2(N-1) \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)
\end{aligned}$$

当 $\tau \in Z_N^*$ 时，分为以下 4 种情况进行讨论。

1) $U+\tau$ 包含 0 元素，$Z_N^* + \tau$ 中未包含 V 中全部的元素时，有

$$\begin{aligned}
& R_{u',v'}(\tau) = N - 2 + 4|(U+\tau)\cap V| - 2(|U|-1) - 2(|V|-1) = \\
& N - 2 + 4|(U+\tau)\cap V| - 4(|U|-1) \equiv N - 2(\mathrm{mod}\,4) \equiv \\
& 3(\mathrm{mod}\,4)
\end{aligned}$$

2) $U+\tau$ 包含 0 元素，$Z_N^* + \tau$ 中包含 V 中全部元素时，有

$$R_{u',v'}(\tau)=N-2+4|(U+\tau)\cap V|-2(|U|-1)-2|V|=$$
$$N-2+4|(U+\tau)\cap V|-2N+4\equiv 2-N(\bmod 4)\equiv$$
$$1(\bmod 4)$$

3) $U+\tau$ 不包含 0 元素，$Z_N^*+\tau$ 中未包含 V 中全部元素时，有

$$R_{u',v'}(\tau)=N-2+4|(U+\tau)\cap V|-2|U|-2(|V|-1)=$$
$$N-2+4|(U+\tau)\cap V|-2N+4\equiv 2-N(\bmod 4)\equiv$$
$$1(\bmod 4)$$

4) $U+\tau$ 不包含 0 元素，$Z_N^*+\tau$ 中包含 V 中全部元素时，有

$$R_{u',v'}(\tau)=N-2+4|(U+\tau)\cap V|-2|U|-2|V|\equiv$$
$$N-2(\bmod 4)\equiv 3(\bmod 4)$$

综上所述，当 $\tau\neq 0$ 时有 $R_{u',v'}(\tau)\equiv 1(\bmod 4)$ 和 $R_{u',v'}(\tau)\equiv 3(\bmod 4)$ 这 2 种情况。证毕。

引理 4 令 $N\equiv 1(\bmod 4)$，当 u 和 v' 分别为周期为 N 的平衡二元序列和平衡几乎二元序列时，互相关值有 $R_{u,v'}(\tau)\equiv 0(\bmod 4)$ 和 $R_{u,v'}(\tau)\equiv 2(\bmod 4)$ 这 2 种情况。

证明 u 和 v' 的互相关函数值可以计算为

$$R_{u,v'}(\tau)=4|(U+\tau)\cap V|+N-1-$$
$$2|(Z_N+\tau)\cap V|-2|(U+\tau)\cap Z_N^*|$$

由于 $u(0)=-1$，v' 是几乎二元序列，因此 $|U|=|V|=\dfrac{N-1}{2}$。

当 $\tau=0$ 时，可以得到

$$R_{u,v'}(0)=4|(U+\tau)\cap V|+N-1-2|U|-2|V|=$$
$$4|(U+\tau)\cap V|-(N-1)\equiv 0(\bmod 4)$$

当 $\tau\in Z_N^*$ 时，分为以下 2 种情况进行讨论。

1) $U+\tau$ 不包含 0 元素时，则

$$R_{u,v'}(\tau)=N-1+4|(U+\tau)\cap V|-2|U|-2|V|\equiv$$
$$1-N(\bmod 4)\equiv 0(\bmod 4)$$

2) $U+\tau$ 包含 0 元素时，则

$$R_{u,v'}(\tau)=N-1+4|(U+\tau)\cap V|-2(|U|-1)-2|V|\equiv$$
$$N+1(\bmod 4)\equiv 2(\bmod 4)$$

综上所述，当 $\tau\neq 0$ 时，有 $R_{u,v'}(\tau)\equiv 0(\bmod 4)$ 和 $R_{u,v'}(\tau)\equiv 2(\bmod 4)$ 这 2 种情况。证毕。

引理 5 令 $N\equiv 1(\bmod 4)$，当 u' 为周期为 N 的平衡几乎二元序列时，其自相关函数值有 $R_{u'}(\tau\neq 0)\equiv 1(\bmod 4)$ 和 $R_{u'}(\tau\neq 0)\equiv 3(\bmod 4)$ 这 2 种情况。

证明 当 $u'=v'$ 时，引理 5 是引理 3 的特殊情况，根据引理 3 可知引理 5 结论成立。证毕。

通过引理 3 可知，当 2 条序列都为平衡几乎二元序列时，2 条序列的最大互相关值的最小值为 $\theta_c=1$，这时称平衡几乎二元序列对为平衡最优互相关的 I 型–几乎二元序列对。为了获取更多满足应用需求的几乎二元序列对，本文对 $\theta_c=3$ 的平衡几乎二元序列对的理论界及构造方法进行了研究，这时称平衡几乎二元序列对为平衡几乎最优互相关的 I 型–几乎二元序列对。通过引理 4 可知，当一条序列为平衡几乎二元序列，另一条序列为平衡二元序列时，2 条序列的最大互相关值 θ_c 的最小值为 $\theta_c=2$，这时称平衡几乎二元序列对为平衡最优互相关的 II 型–几乎二元序列对。

本文将采用式(10)和式(11)[23]证明 θ_a 的下界值。

$$\sum_{\tau=0}^{N-1}R_{u,v}(\tau)=(\sum_{t=0}^{N-1}u_t)(\sum_{t=0}^{N-1}v_t) \tag{10}$$

$$\sum_{\tau=0}^{N-1}(R_{u,v}(\tau))^2=\sum_{\tau=0}^{N-1}R_u(\tau)R_v(\tau) \tag{11}$$

引理 6 设 u' 和 v' 是几乎二元序列，u 是二元序列，且 u'、v' 和 u 均为周期为 $N\equiv 1(\bmod 4)$ 的平衡序列，则具有平衡最优或平衡几乎最优互相关的 I 型–几乎二元序列对和具有平衡最优互相关的 II 型–几乎二元序列对的互相关值的分布情况如表 3 所示。

证明 以序列对为平衡最优互相关的 II 型–几乎二元序列对为例进行证明。当 $\theta_c=2$ 时，由引理 4 可得 $N_0(\tau=0)=1$，互相关值有 3 种情况，即 $R_{u,v'}(\tau>0)\in\{\{0,2\},\{0,-2\},\{0,\pm 2\}\}$，下面分别对这 3 种情况进行讨论。令 $N_0=|\{0<\tau<N:R_{u,v'}(\tau)=0\}|$，$N_2=|\{0<\tau<N:R_{u,v}(\tau)=2\}|$，$N_{-2}=|\{0<\tau<N:R_{u,v}(\tau)=-2\}|$。

1) 若 $R_{u,v'}(\tau)\in\{0,2\}$，由式(10)可得 $\sum_{\tau=0}^{N-1}R_{u,v'}(\tau)=N_0\times 0+N_2\times 2=0$，可得 $N_2=0$，由于 N_2 为正整数，所以这种情况不存在。

2) 若 $R_{u,v'}(\tau)\in\{0,-2\}$，与情况 1)分析类似，可知 $R_{u,v'}(\tau)\in\{0,-2\}$ 的情况也不存在。

3) 若 $R_{u,v'}(\tau)\in\{0,\pm 2\}$，由引理 4 可知

表 3　　几乎二元序列对的互相关值分布情况

θ_c	序列类型	互相关值	N_i
1	平衡最优互相关 I 型–几乎二元序列对	$R_{u',v'}(\tau)\in\{0,1,-1\}$	N_0=1，$N_1=\dfrac{N-1}{2}$，$N_{-1}=\dfrac{N-1}{2}$
2	平衡最优互相关 II 型–几乎二元序列对	$R_{u,v'}(\tau)\in\{0,2,-2\}$	$N_0=\dfrac{N+1}{2}$，$N_2=\dfrac{N-1}{4}$，$N_{-2}=\dfrac{N-1}{4}$
3	平衡几乎最优互相关 I 型–几乎二元序列对	$R_{u',v'}(\tau)\in\{0,3,-3\}$	N_0=1，$N_3=\dfrac{N-1}{2}$，$N_{-3}=\dfrac{N-1}{2}$

$R_{u,v'}(\tau>0)$ 的值会出现 $R_{u,v'}(\tau)\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ 和 $R_{u,v'}(\tau)\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ 这 2 种情况，由于 $\theta_c=2$，因此满足 $R_{u,v'}(\tau)\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ 的互相关值为 $R_{u,v'}(\tau)=0$，又由情况 1) 和情况 2) 分析可知，$R_{u,v'}(\tau)\in\{0,2\}$ 和 $R_{u,v'}(\tau)\in\{0,-2\}$ 这 2 种情况不存在，因此必有互相关值 $R_{u,v'}(\tau)\in\{0,\pm 2\}$ 成立。在分析 N_0、N_2、N_{-2} 的个数时，主要是分析引理 4 中互相关式 $R_{u,v'}(\tau)$= $4|(U+\tau)\cap V|+N-1-2|(Z_N+\tau)\cap V|-2|(U+\tau)\cap Z_N^*|$ 中 $|(U+\tau)\cap Z_N^*|$ 的部分。在互相关分情况讨论中，由于 $|U|=\dfrac{N-1}{2}$，随着 τ 的变化，$U+\tau$ 不包含 0 元素的情况有 $\dfrac{N-1}{2}$ 个，所以满足 $R_{u,v'}(\tau)\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ 的值有 $\dfrac{N-1}{2}$ 个；$U+\tau$ 包含 0 元素的个数有 $\dfrac{N-1}{2}$ 个，所以满足 $R_{u,v'}(\tau)\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ 的值有 $\dfrac{N-1}{2}$ 个。由式(10)可得 $\sum_{\tau=0}^{N-1}R_{u,v}(\tau)=N_0\times 0+N_2\times 2+N_{-2}\times(-2)=0$，所以 $N_2=N_{-2}$，综上所述，$N_0=\dfrac{N+1}{2}$，$N_2=\dfrac{N-1}{4}$，$N_{-2}=\dfrac{N-1}{4}$。

其他情况可按类似方法分析得到。证毕。

接下来，基于表 3 中列出的 3 种类型的具有平衡（几乎）最优互相关的几乎二元序列对互相关函数值及其分布情况，分别给出 3 种类型的几乎二元序列的自相关函数理论界。

定理 1　设 u' 和 v' 是周期为 $N\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ 且具有最优互相关的平衡 I 型–几乎二元序列对，即 $\theta_c=1$，则序列 u' 和 v' 的最大异相自相关幅值满足

$$\theta_a\geqslant\begin{cases}\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil, & \left\lceil\sqrt{N}\right\rceil\text{是奇数}\\ \left\lceil\sqrt{N}\right\rceil+1, & \left\lceil\sqrt{N}\right\rceil\text{是偶数}\end{cases}\tag{12}$$

证明　将引理 6 中得到的 N_0=1、$N_1=\dfrac{N-1}{2}$、$N_{-1}=\dfrac{N-1}{2}$ 代入式(11)左边可得

$$\sum_{\tau=0}^{N-1}(R_{u,v}(\tau))^2=(-1)^2\times\frac{N-1}{2}+1^2\times\frac{N-1}{2}=N-1\tag{13}$$

由于 $\theta_a=\max\{|R_{u'}(\tau)|,|R_{v'}(\tau)|:0<\tau<N\}$，则式(11)右边为

$$\sum_{\tau=0}^{N-1}R_u(\tau)R_v(\tau)=(N-1)^2+\sum_{\tau=1}^{N-1}R_u(\tau)R_v(\tau)\geqslant$$
$$(N-1)^2-(N-1)\theta_a^2\tag{14}$$

结合式(13)和式(14)，可得

$$N-1\geqslant(N-1)^2-(N-1)\theta_a^2\tag{15}$$

对式(15)化简，可得

$$\theta_a^2\geqslant N-2$$

由引理 5 可得 $\theta_a^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$，而 $N-2\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$，$N-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$，所以 $\theta_a^2\geqslant N$，从而可得到式(12)结论。证毕。

定理 2　设 u 和 v' 是周期为 $N\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ 且具有最优互相关的平衡 II 型–几乎二元序列对，即 $\theta_c=2$，则序列 u 和 v' 的最大异相自相关幅值满足

$$\theta_a\geqslant\begin{cases}\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil, & \left\lceil\sqrt{N}\right\rceil\text{是奇数}\\ \left\lceil\sqrt{N}\right\rceil+1, & \left\lceil\sqrt{N}\right\rceil\text{是偶数}\end{cases}\tag{16}$$

证明　定理 2 的证明与定理 1 证明类似。

定理 3　u' 和 v' 是周期为 $N\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ 且具有几乎最优互相关的平衡 I 型–几乎二元序列对，即 $\theta_c=3$，则序列 u' 和 v' 的最大异相自相关幅值满足

$$\theta_a\geqslant\begin{cases}\left\lceil\sqrt{N-8}\right\rceil, & \left\lceil\sqrt{N-8}\right\rceil\text{是奇数}\\ \left\lceil\sqrt{N-8}\right\rceil+1, & \left\lceil\sqrt{N-8}\right\rceil\text{是偶数}\end{cases}\tag{17}$$

表 4　满足条件的平衡(几乎)最优几乎二元序列对

序列	特征集	互相关值	自相关值	x 值	最优性
u',v'	U',V'	$R_{u',v'}(\tau)=\begin{cases}0, & 1次\\ x, & \frac{N-1}{2}次\\ -x, & \frac{N-1}{2}次\end{cases}$	$R_{u'(v')}(\tau)=\begin{cases}N-1, & 1次\\ -1-2y, & \frac{N-1}{2}次\\ -1+2y, & \frac{N-1}{2}次\end{cases}$	$x=\pm1$ $x=\pm3$	最优 几乎最优
$u,v'(u',v)$	$U,V'(U',V)$	$R_{u',v(u,v')}(\tau)=\begin{cases}0, & \frac{N+1}{2}次\\ x+1, & \frac{N-1}{4}次\\ -x-1, & \frac{N-1}{4}次\end{cases}$	$R_{u'(v')}(\tau)=\begin{cases}N-1, & 1次\\ -1-2y, & \frac{N-1}{2}次\\ -1+2y, & \frac{N-1}{2}次\end{cases}$ $R_{u(v)}(\tau)=\begin{cases}N, & 1次\\ -1-2y, & \frac{N-1}{2}次\\ -1+2y, & \frac{N-1}{2}次\end{cases}$	$x=1$	最优

证明　定理 3 的证明与定理 1 证明类似。

定义 6　设 u' 和 v' 是几乎二元序列，u 是二元序列，且 u'、v' 和 u 均为周期为 $N\equiv1(\bmod 4)$ 的平衡序列，当 u' 和 v' 为具有最优互相关的平衡 I 型–几乎二元序列对且 θ_a 满足式(12)下界值时，称 u' 和 v' 为平衡最优几乎二元序列对。当 u 和 v' 为具有最优互相关的平衡 II 型–几乎二元序列对且 θ_a 满足式(16)下界时，称 u 和 v' 为平衡最优几乎二元序列对。当 u' 和 v' 为具有几乎最优互相关平衡 I 型–几乎二元序列对且 θ_a 满足式(17)下界值时，称 u' 和 v' 为平衡几乎最优几乎二元序列对。

4　平衡 (几乎)最优几乎二元序列对构造

本节将分别给出满足定义 6 的周期为素数 $N=4f+1$ 的平衡最优几乎二元序列对和平衡几乎最优几乎二元序列对的构造方法。

定理 4　令 $N=4f+1=4y^2+x^2$ 为一奇素数，其中，f 为整数，y 为整数。当 $U=U'=D_0\bigcup D_1, V=V'=D_0\bigcup D_3$，几乎二元序列对 u' 和 v'、u' 和 v、u 和 v' 的其他参数满足表 4 所示要求时，得到的序列对为平衡最优几乎二元序列对或平衡几乎最优几乎二元序列对。

证明　以 f 为奇数，$x=1$，特征集合 $U'=D_0\bigcup D_1$，$V'=D_0\bigcup D_3$ 的平衡几乎二元序列对为例进行证明。首先考虑 u' 和 v' 的互相关，当 $\tau=0$ 时，容易得到 $R_{u',v'}(0)=0$。当 $\tau\neq0$ 时，存在一个整数 k（$0\leqslant k<4$），使 $\tau\in D_k$，由于 $u'(0)v'(\tau)+v'(0)u(N-\tau)=0$，则

$$R_{u',v'}(\tau)=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\,|(D_k+\tau)\bigcap D_k|+\sum_{k=0}^{3}|(D_{k+1}+\tau)\bigcap D_k|-\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\,|(D_{k+2}+\tau)\bigcap D_k|-\sum_{k=0}^{3}|(D_{k+3}+\tau)\bigcap D_k|$$

由于 $\tau\in D_k$，可得 $\tau^{-1}\in D_{-k}$。对上式等号左边各项均乘以 τ^{-1} 并化简可得

$$R_{u',v'}(\tau)=\sum_{h=0}^{3}(-1)^h\,|(D_{h-k}+1)\bigcap D_{h-k}|+\sum_{h=0}^{3}|(D_{h+1-k}+\tau)\bigcap D_{h-k}|-\sum_{h=0}^{3}(-1)^h\,|(D_{h+2-k}+\tau)\bigcap D_{h-k}|-\sum_{h=0}^{3}|(D_{h+3-k}+\tau)\bigcap D_{h-k}|$$

根据分圆数的定义（见式(6)），将上式转换成分圆数的形式，并根据引理 2 进行化简可得

$$R_{u',v'}(\tau)=\sum_{m=0}^{3}(m,m)+\sum_{m=0}^{3}(m,m+1)+\sum_{m=0}^{3}(m,m+2)-\sum_{m=0}^{3}(m,m+3)-2(1-k,1-k)-2(3-k,3-k)-2(-k,2-k)-2(2-k,-k)=$$
$$2f-1-2(1-k,1-k)-2(3-k,3-k)-$$

$$2(-k,2-k)-2(2-k,-k)=\begin{cases}x, & \tau\in D_0\cup D_2\\ -x, & \tau\in D_1\cup D_3\end{cases}$$

因此，$\theta_c=|x|=1$，满足引理 6 的结论，u' 和 v' 为具有最优互相关的平衡 I 型–几乎二元序列对。证毕。

与计算 u' 和 v' 的互相关函数值方法类似，可得 u' 和 v' 的自相关函数值分别为

$$R_{u'}(\tau)=\begin{cases}N-1, & \tau=0\\ -1-2y, & \tau\in D_0\cup D_2\\ -1+2y, & \tau\in D_1\cup D_3\end{cases}$$

$$R_{v'}(\tau)=\begin{cases}N-1, & \tau=0\\ -1+2y, & \tau\in D_0\cup D_2\\ -1-2y, & \tau\in D_1\cup D_3\end{cases}$$

由上述分析可知，$\theta_a=2|y|+1$。通过定理 1 得到的界限为 $\theta_a\geqslant\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil=\left\lceil\sqrt{(4y^2+1)}\right\rceil=2|y|+1$，所以本文方法得到的 θ_a 值满足式(12)的下界值。根据定义 6 知 u' 和 v' 为平衡最优几乎二元序列对。

类似地，当 $x=-1$ 时，也可得到 u' 和 v' 为平衡最优几乎二元序列对；当 $x=\pm 3$ 时，u' 和 v' 为平衡几乎最优几乎二元序列对；当取 $x=1$ 时，u' 和 v 或 u 和 v' 为平衡最优几乎二元序列对。

例 1　设 $N=37=4\times 3^2+1^2$，$\alpha=2$，可得 $D_0=\{1,7,9,10,12,16,26,33,34\}$，$D_1=\{2,14,15,18,20,24,29,31,32\}$，$D_2=\{3,4,11,21,25,27,28,30,36\}$，$D_3=\{5,6,8,13,17,19,22,23,35\}$。根据定理 4 可知，序列 u' 和 v' 分别为 $u'=\{0,1,1,-1,-1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,1,-1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,-1,1,1,1,1,-1,-1\}$，$v'=\{0,1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,-1\}$ 通过计算可知，序列对 u' 和 v' 的互相关值为

$$R_{u',v'}(\tau)=\{0,1,-1,1,1,-1,-1,1,-1,1,1,1,1,-1,-1,-1,1,-1,-1,-1,-1,1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,1\}$$

序列 u' 和 v' 的自相关值分别为

$$R_{u'}(\tau)=\{36,-7,5,-7,-7,5,5,-7,5,-7,-7,-7,-7,5,5,5,-7,5,5,5,5,-7,5,5,5,-7,-7,-7,-7,5,-7,5,5,-7,-7,5,-7\}$$

$$R_{v'}(\tau)=\{36,5,-7,5,5,-7,-7,5,-7,5,5,5,5,-7,-7,-7,5,-7,-7,-7,-7,5,-7,-7,-7,5,5,5,5,-7,5,-7,-7,5,5,-7,5\}$$

显然，当 N=37 时有 $\theta_c=1$ 和 $\theta_a=7$ 满足引理 6 的要求和定理 1 的下界值，可知得到的序列对 u' 和 v' 为平衡最优几乎二元序列对。而对于相同周期长度，通过文献[20]的方法得到 $\theta_c=3$ 和 $\theta_a=7$，可知在相同 θ_a 值情况下本文得到的序列对的 θ_c 更小。

当 N=37，u' 和 v 的特征集合分别为 $U'=D_0\cup D_1$，V=$D_0\cup D_3$ 时，可得 $\theta_c=2$，$\theta_a=7$ 满足引理 6 的要求和定理 2 的下界值，所以序列对 u' 和 v 为平衡最优几乎二元序列对。同样与文献[20]中方法得到的最优二元序列对相比，在相同 θ_a 值情况下本文得到的序列对的 θ_c 更小。

当 N=13，u' 和 v' 的特征集合为 $U'=D_0\cup D_1$，V'=$D_0\cup D_3$ 时，可得 $\theta_c=3$，$\theta_a=3$，满足引理 6 的

表 5　　现有的平衡（几乎）最优几乎二元序列对的比较

周期 N	序列对	互相关	自相关	理论界	f	参考文献
N=x^2+4 $x\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$	平衡二元序列对	$\{1,x,-x\pm 2\}$	$\{1,-3\}$	$\theta_a=3$ $\theta_c\geqslant\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil$	f 为奇数	文献[18]
N=$1+4y^2$ $y\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$	平衡二元序列对	$\{1,-3\}$	$\{-1\pm 2y\}$	$\theta_c=3$ $\theta_a\geqslant\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil$	f 为奇数	文献[20]
N=$1+4y^2$ $y>0$	平衡最优几乎二元序列对	$\{0,\pm 1\}$	$\{-1\pm 2y\}$	$\theta_c=1$ $\theta_a\geqslant\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil$	f 为奇数 f 为偶数	定理 4
N=$1+4y^2$ $y>0$	平衡最优几乎二元序列对	$\{0,\pm 2\}$	$\{-1\pm 2y\}$	$\theta_c=2$ $\theta_a\geqslant\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil$	f 为奇数 f 为偶数	定理 4
N=$4y^2+(-3)^2$ $y<0$ N=$4y^2+(-3)^2$ $y>0$	平衡几乎最优几乎二元序列对	$\{0,\pm 3\}$	$\{-1\pm 2y\}$	θ_c=3 $\theta_a\geqslant\left\lceil\sqrt{N-8}\right\rceil$	f 为奇数 f 为偶数	定理 4

要求和定理 3 的下界值，所以 u' 和 v' 为平衡几乎最优几乎二元序列对。其互相关最大值虽然与文献[20]提出的界限相同，但是不再限定 f 为奇数，拓宽了最优序列对的存在空间。

5 结束语

本文通过在二元序列基础上引入一个 0 元素的方式，首先对周期为 $N \equiv 1(\bmod 4)$ 的两类（几乎）二元序列对的互相关函数值的最小值进行了研究，然后在此互相关值基础上，对序列对中序列的自相关值的理论界进行了研究，最后基于四阶分圆类，构造了 4 对满足定理 1～定理 3 中理论界下界值的周期为 $N \equiv 1(\bmod 4)$ 的平衡（几乎）最优相关特性的几乎二元序列对。表 5 列出了本文与目前已有的平衡最优二元序列对在性能参数方面的对比情况。由表 5 可知，与文献[18]相比，文献[18]是在序列具有最优自相关的前提下得到了序列对互相关满足的理论界。与文献[20]相比，虽然文献[20]满足最优二元序列对的理论界，但是限定 f 为奇数，导致存在空间相当有限，在 $N \leqslant 300$ 内仅存在周期为 $N = 5,37,101,197$ 这 4 种情况，而本文将 f 的取值扩展到任意整数可得到更多满足理论界的序列对，同样在 $N \leqslant 300$ 的范围内，本文可得到的平衡（几乎）最优序列对周期为 N=5,13,17,37,73,101,109,197,257 这 9 种情况，拓宽了序列存在空间。在文献[20]中，只构造了满足 $\theta_c = 3$ 的序列对，而在本文中，构造了 $\theta_c = 1$ 、$\theta_c = 2$ 和 $\theta_c = 3$ 的 3 种几乎二元序列对，进一步改善了序列相关性的同时也为实际工程应用和通信系统提供了更多的可供选择的序列对。

参考文献：

[1] DIMITROV M, BAITCHEVA T, NIKOLOV N. Efficient generation of low autocorrelation binary sequences[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2020, 27: 341-345.

[2] 康家方, 王红星, 赵志勇, 等. 新的扩频通信调制方法[J]. 通信学报, 2013, 34(5): 79-87.
KANG J F, WANG H X, ZHAO Z Y, et al. Novel method of spread spectrum communication[J]. Journal on Communications, 2013, 34(5): 79-87.

[3] LUO J Q. Binary sequences with three-valued cross correlations of different lengths[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(12): 7532-7537.

[4] WELCH L. Lower bounds on the maximum cross correlation of signals [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1974, 20(3): 397-399.

[5] LIU Z L, GUAN Y L, PARAMPALLI U, et al. Spectrally-constrained sequences: bounds and constructions[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2018, 64(4): 2571-2582.

[6] SHEDD D, SARWATE D. Construction of sequences with good correlation properties[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1979, 25(1): 94-97.

[7] LUO L F, MA W P. Balanced quaternary sequences of even period with optimal autocorrelation[J]. IET Communications, 2019, 13(12): 1808-1812.

[8] TANG X H, GONG G. New constructions of binary sequences with optimal autocorrelation value/magnitude[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(3): 1278-1286.

[9] PENG X P, LIN H B, LIU Y M, et al. New families of almost binary sequences with optimal autocorrelation property[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2019, E102.A(2): 467-470.

[10] SU W, YANG Y, ZHOU Z C, et al. New quaternary sequences of even length with optimal auto-correlation[J]. Science China Information Sciences, 2018, 61(2): 022308.

[11] 彭秀平, 冀惠璞, 郑德亮, 等. 周期为 2q 理想几乎四进制序列构造研究[J]. 通信学报, 2019, 40(12): 105-113.
PENG X P, JI H P, ZHENG D L, et al. Study on the constructions of optimal almost quaternary sequences with period 2q[J]. Journal on Communications, 2019, 40(12): 105-113.

[12] SONG M K, SONG H Y. Perfect polyphase sequences from cubic polynomials[C]//Proceedings of 2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE Press, 2017: 1292-1295.

[13] ZHANG D, HELLESETH T. New optimal sets of perfect polyphase sequences based on circular Florentine arrays[C]//Proceedings of 2020 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE Press, 2020: 2921-2925.

[14] PARK K H, SONG H Y, KIM D S, et al. Optimal families of perfect polyphase sequences from the array structure of Fermat-quotient sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(2): 1076-1086.

[15] CHONG J F, ZHUO Z P. Cross-correlation properties of some perfect binary sequences[C]//Proceedings of 2011 IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering. Piscataway: IEEE Press, 2011: 654-657.

[16] ZHANG T, LI S X, FENG T, et al. Some new results on the cross correlation of m-sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(5): 3062-3068.

[17] WU Y S, YUE Q, SHI X Y, et al. Binary and ternary sequences with a few cross correlations[J]. Cryptography and Communications, 2020, 12(3): 511-525.

[18] DING C S, TANG X H. The cross-correlation of binary sequences with optimal autocorrelation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(4): 1694-1701.

[19] YANG Y, TANG X H. Balanced quaternary sequences pairs of odd

period with (almost) optimal autocorrelation and cross-correlation[J]. IEEE Communications Letters, 2014, 18(8): 1327-1330.

[20] YANG Y, TANG X H, ZHOU Z C. The autocorrelation magnitude of balanced binary sequence pairs of prime period $N\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ with optimal cross-correlation[J]. IEEE Communications Letters, 2015, 19(4): 585-588.

[21] 沈秀敏. 基于分圆类的理想序列偶设计[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2017.

SHEN X M. The design of optimal sequence pairs based on cyclotomy[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2017.

[22] DING C S, YIN J X. Sets of optimal frequency-hopping sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(8): 3741-3745.

[23] FAN P Z, DARNELL M. Sequence design for communications applications[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 1996.

[作者简介]

彭秀平（1984− ），女，安徽安庆人，博士，燕山大学副教授，主要研究方向为编码理论、信号设计等。

李红晓（1995− ），女，河北邢台人，燕山大学硕士生，主要研究方向为编码理论、信号设计等。

王仕德（1997− ），男，河北石家庄人，燕山大学硕士生，主要研究方向为编码理论、信号设计等。

林洪彬 (1979− ），男，河北秦皇岛人，燕山大学副教授，主要研究方向为智能信息处理、动态复杂场景认知。